

# Zagadnienia mechaniki materiałów kompozytowych

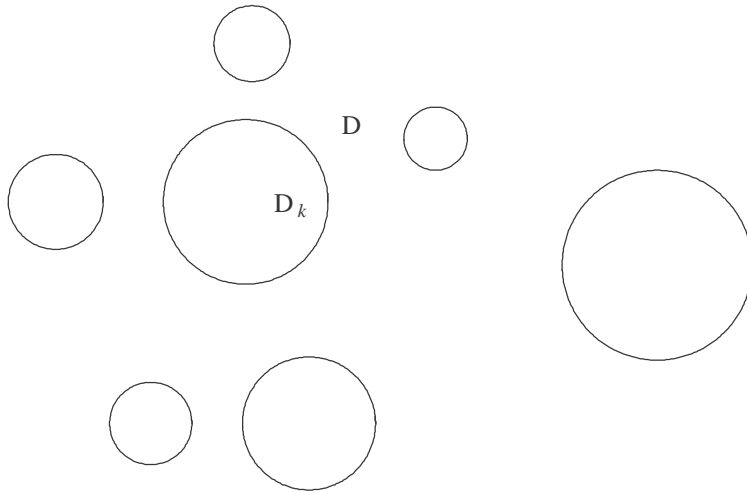
*Vladimir Mityushev*

Instytut Matematyki, Akademia Pedagogiczna w Krakowie

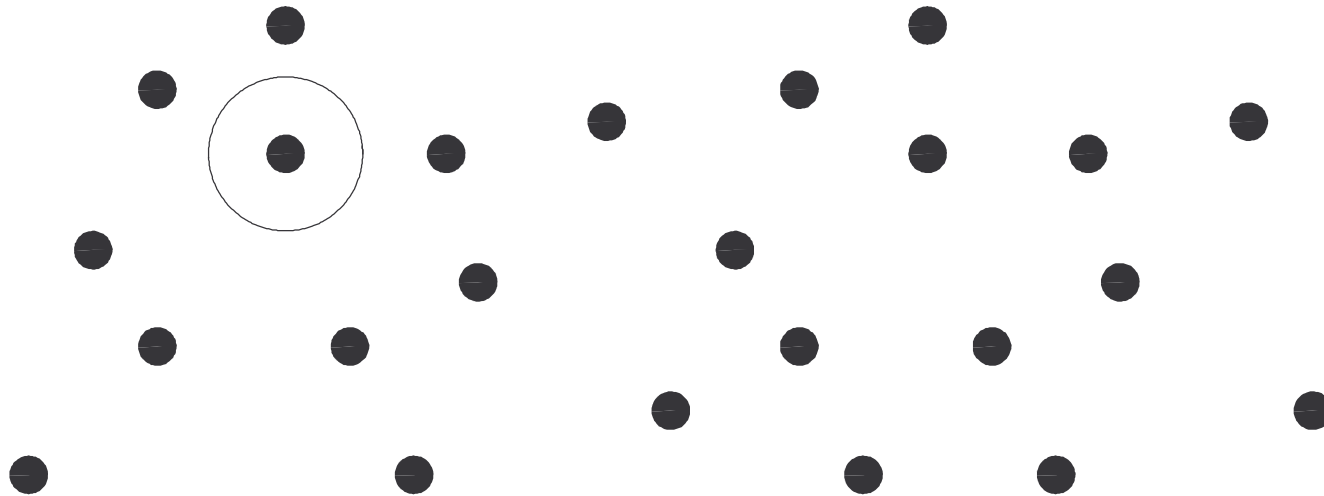
# 1. Zagadnienie Riemanna-Hilberta dla obszarów wielospójnych

Wyznaczyć funkcję  $\phi(z)$  analityczną w  $D$  ciągłą w  $D \cup \partial D$  spełniającą warunki brzegowe

$$\operatorname{Re} \overline{\lambda(t)} \phi(t) = f(t) \text{ on } |t - a_k| = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{RH})$$



## 2. Zagadnienia mechaniki materiałów kompozytowych

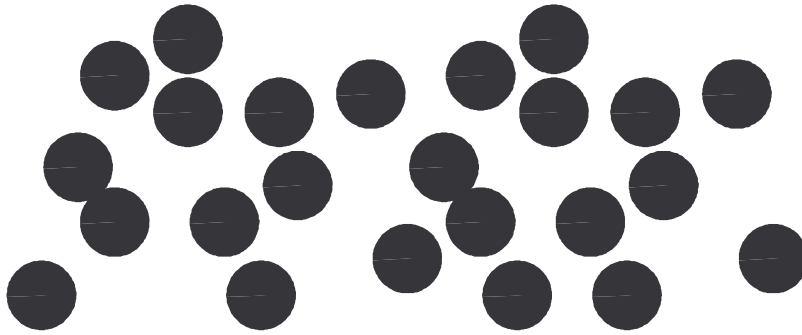


Przy założeniu, że wszystkie wtrącenia są jednakowe i odległości pomiędzy wtrąceniami są duże, tzn. koncentracja wtrąceń  $v$  jest wystarczająco mała, jest słuszny przybliżony wzór Clausiusa-Mossotti'ego (Maxwella-Garnetta) uzyskany w 1864

$$\lambda_e \approx \frac{1+\rho v}{1-\rho v}, \quad (\text{CM})$$

gdzie  $v$  jest udziałem objętościowym wtrąceń,  $\rho = \frac{\lambda^- - 1}{\lambda^- + 1}$  - parameter kontrastu; przewodność osnowy  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda^-$  przewodność wtrąceń.

W przypadku dużych  $v$  wzór (CM) nie jest słuszny, bo w tym przypadku występuje efekt perkolacji:



Są znane inne ciekawe wzory dla kompozytów innej struktury geometrycznej.

Efektywna przewodność laminat  $\lambda_e^x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$  - średnia arytmetyczna,  $\lambda_e^y = \left(\frac{v_1}{\lambda_1} + \frac{v_2}{\lambda_2}\right)^{-1}$  - średnia harmoniczna.

Efektywna przewodność szachownicy  $\lambda_e = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ .

Podstawowe pytanie **teorii uśrednienia** równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Mamy równanie postaci

$$\nabla \cdot (\lambda_\varepsilon(x, y) \nabla u_\varepsilon(x, y)) = f(x, y)$$

ze zmiennym współczynnikiem  $\lambda_\varepsilon(x, y)$ , gdzie  $\varepsilon$  jest charakternym wymiarem jego zmienności (na przykład, wymiar wtrącenia).

Czy istnieje granica  $u(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, y)$  i jakie równanie spełnia funkcja  $u(x, y)$ ?

Przy pewnych założeniach granica ta istnieje i spełnia równanie

$$\nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla u(x, y)) = f(x, y),$$

gdzie tensor  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_e^x & \lambda_e^{xy} \\ \lambda_e^{xy} & \lambda_e^y \end{pmatrix}$  nazywa się tensorem efektywnym.

### Podstawowe poprzednie publikacje:

Lord Rayleigh, On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Phil. Mag.* 34 (1892) 481-502.

R.C. McPhedran, Transport properties of cylinder pairs and the square array of cylinders. *Proc. R. Soc. Lond.* A408 (1986) 31-43.

R.C. McPhedran, G. Milton, Transport properties of touching cylinder pairs and of the square array of touching cylinders. *Proc. R. Soc. Lond.* (1987) A411, 313-326.

R.C. McPhedran, L. Poladian, G. Milton, Asymptotic studies of closely spaced, highly conducting cylinders. *Proc. R. Soc. Lond.* A415 (1988) 185-196.

W.T. Perrins, D.R. McKenzie, R.C. McPhedran, Transport properties of regular array of cylinders. *Proc. R. Soc. Lond.* A369 (1979) 207-225.

A.S. Sangani, C. Yao, Transport properties in random arrays of cylinders. 1. Thermal conduction. *Phys. Fluids* 31 (1988) 2426-2434.

D.J. Bergman, The dielectric constant of a composite material - a problem in classical physics. *Phys. Reports* C43 (1983) 378-407.

D.J. Bergman, K.J. Dunn, Bulk effective dielectric constant of a composite with a periodic microgeometry. *Phys. Rev.* B45 (1992) 13262-13271.

### 3. Warunek kontaktu doskonałego

Warunki sprzężenia:  $u^+ = u^-$ ,  $\lambda^+ \frac{\partial u^+}{\partial n} = \lambda^- \frac{\partial u^-}{\partial n}$  na brzegu wtrącenia ( $\lambda^+ = 1$ )

Wprowadzamy potencjał zespolony:  $u(z) = \operatorname{Re}(\phi(z) + z)$  w osnowie

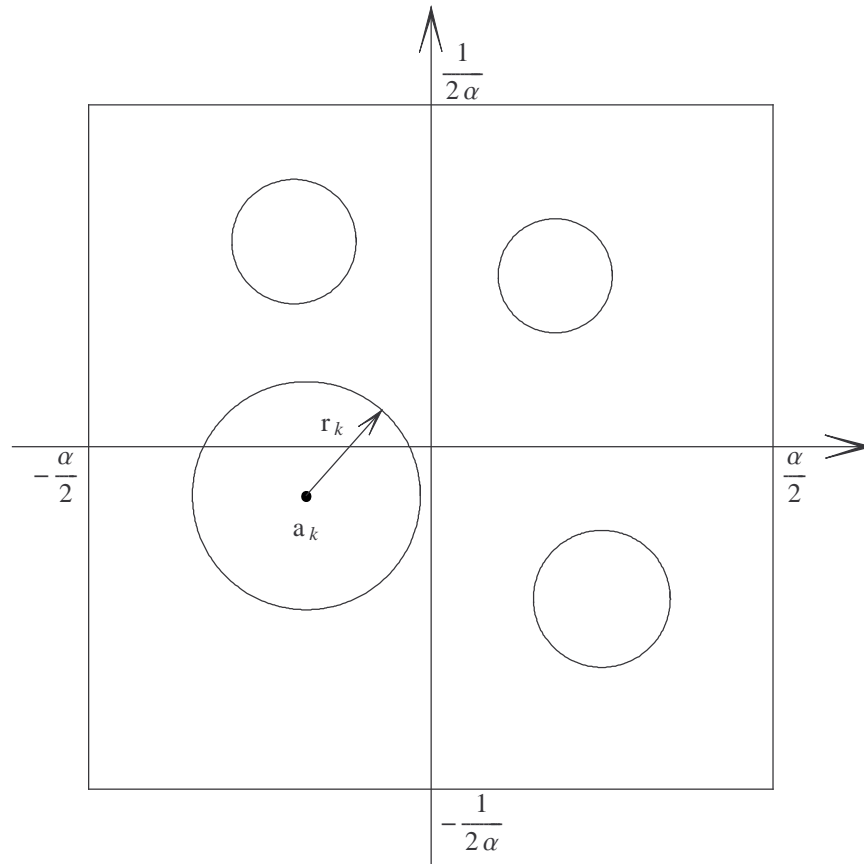
$$u(z) = \frac{2}{1+\lambda^-} \operatorname{Re} \phi_k(z) \text{ we wtrąceniu z numerem } k.$$

Warunki sprzężenia w nomenklaturze potencjałów zespolonych (**R - liniowe zagadnienie**)

$$\phi(t) = \phi_k(t) - \rho \overline{\phi_k(t)} - t, \quad |t - a_k| = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (R)$$

## 4. Zagadnienia brzegowe w klasie funkcji periodycznych i równania funkcyjne

Komórka podstawowa:



Równania:  $\Delta u = 0$  (równanie Laplace'a)

Warunki sprzężenia:  $u^+ = u^-$ ,  $\frac{\partial u^+}{\partial n} = \lambda^- \frac{\partial u^-}{\partial n}$  na brzegu wtrącenia

Warunki quasi-okresowości:  $u(z + \alpha) = u(z) + \alpha$ ,  $u(z + 1/i\alpha) = u(z)$ .

$\mathbb{R}$ - liniowe zagadnienie w klasie funkcji periodycznych:

$$\phi(t) = \phi_k(t) - \rho_k \overline{\phi_k(t)}, \quad |t - a_k| = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

**Redukcja  $\mathbb{R}$ - liniowego zagadnienia (3.1) w przypadku siatki kwadratowej ( $\alpha = 1$ ) do układu równań funkcyjnych:**

1. Zamiast (3.1) rozpatrujemy zagadnienie na pochodne  $\psi(z) = \frac{d\phi(z)}{dz}$ ,  $\psi_m(z) = \frac{d\phi_m(z)}{dz}$

$$\psi(t) = \psi_k(t) + \rho_k \left( \frac{r_k}{z - a_k} \right)^2 \overline{\psi_k(t)}, \quad |t - a_k| = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1')$$

2. Wprowadzamy funkcję

$$\Phi(z) = \psi_m(t) - \sum_{k=1}^n \rho_k \sum_{m_1, m_2} \left( \frac{r_k}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} \right)^2 \overline{\psi_k \left( \frac{r_k^2}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} + a_k \right)},$$

$$|z - a_m| \leq r_m, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Phi(z) = \psi(t) - \sum_{k=1}^n \rho_k \sum_{m_1, m_2} \left( \frac{r_k}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} \right)^2 \overline{\psi_k \left( \frac{r_k^2}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} + a_k \right)} \quad z \in D.$$

**3.** Na każdym okręgu  $\partial D_m$  przy pomocy (3.1') obliczamy skok

$$\Delta_m \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow z \in D_m} \Phi(z) - \lim_{t \rightarrow z \in D_m} \Phi(z) = \psi_m(t) + \rho_k \left( \frac{r_m}{z - a_m} \right)^2 \overline{\psi_m(t)} - \psi(t) = 0.$$

Na mocy zasady przedłużania analitycznego oraz twierdzenia Liouville'a otrzymujemy, że  $\Phi(z) = c$  – constant.

**4.** Z równości  $\Phi(z) = c$  w kołach  $|z - a_m| \leq r_m$  uzyskujemy układ równań funkcyjnych

$$\psi_m(z) = \sum_{k=1}^n \rho_k \sum_{m_1, m_2} / \left( \frac{r_k}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} \right)^2 \overline{\psi_k \left( \frac{r_k^2}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} + a_k \right)} + c,$$

$$|z - a_m| \leq r_m, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Uwaga. Dalej ustalamy  $c = 1$ .

### Konstruktywne rozwiązanie układu równań funkcyjnych (3.2):

Ustalmy  $k \neq m$ . Niech  $\psi_k(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{ks}(z - a_k)^s$  – szereg Taylora. Wtedy

$$\sum_{m_1, m_2} \left( \frac{r_k}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} \right)^2 \overline{\psi_k \left( \frac{r_k^2}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} + a_k \right)} =$$

$$\sum_{m_1, m_2} \left( \frac{r_k}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} \right)^2 \sum_{s=1}^{\infty} \psi_{ks} \left( \frac{r_k^2}{z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2} \right)^s =$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \overline{\psi_{ks}} r_k^{2(s+1)} \sum_{m_1, m_2} (z - a_k - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2)^{-(s+2)} = \sum_{s=1}^{\infty} \overline{\psi_{ks}} r_k^{2(s+1)} E_{s+2}(z - a_k)$$

## 5. Szeregi Eisensteina-Rayleigha i funkcje Eisensteina

Sumowanie według Eisensteina (1848) (patrz A. Weil, 1976)

$$\sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}} := \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m_2=-M}^M \sum_{m_1=-N}^N$$

Rozważmy szeregi

$$S_{2k} = \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(\alpha m_1 + i \alpha^{-1} m_2)^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

wprowadzone przez Eisensteina (1864) i Rayleigha (1892).

Szybkie wzory obliczeniowe

$$S_2 = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{1}{3} - 8 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m h^{2m}}{1-h^{2m}}\right), \quad \text{gdzie } h = \exp\left(-\frac{\pi}{\alpha^2}\right),$$

$$S_4 = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^4 \left(\frac{1}{15} + 16 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m^3 h^{2m}}{1-h^{2m}}\right),$$

$$S_6 = \frac{1}{15} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^6 \left(\frac{2}{63} - 16 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m^5 h^{2m}}{1-h^{2m}}\right),$$

$$S_{2k} = \frac{3}{(2k+1)(2k-1)(k-3)} \sum_{m=2}^{k-2} (2m-1)(2k-2m-1) S_{2m} S_{2(k-m)}, \quad k = 4, 5, \dots$$

W przypadku siatki kwadratowej ( $\alpha = 1$ ) mamy  $S_2 = \pi$ .

## Funkcje Eisensteina:

$$E_k(z) = \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(z - \alpha m_1 - i \alpha^{-1} m_2)^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Związek z eliptycznymi funkcjami:

$$E_1(z) = \zeta(z) - S_2 z, \quad E_2(z) = \wp(z) + S_2, \quad E_{k+1}(z) = -\frac{1}{k} E_k'(z), \quad k = 2, 3, \dots,$$

gdzie  $\zeta(z)$  i  $\wp(z)$  są funkcjami Weierstrassa.

$$\psi_m(z) = \sum_{k=1}^n \rho_k \sum_{m_1, m_2} \left( \frac{r_k}{z - a_k - m_1 - i m_2} \right)^2 \overline{\psi_k \left( \frac{r_k}{z - a_k - m_1 - i m_2} + a_k \right)} + 1,$$

$$|z - a_m| \leq r_m, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

Rozpatrzmy równania funkcyjne (3.2) w przestrzeni Banacha  $\mathcal{B}$  funkcji  $\Psi(z) = \psi_m(z)$  analitycznych w każdym kole  $|z - a_m| < r_m$  i ciągłych w  $|z - a_m| \leq r_m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) z normą  $\|\Psi\| = \max_{1 \leq m \leq n} \max_{|z - a_m| \leq r_m} |\psi_m(z)|$ .

**Twierdzenie 1.** Równanie (3.2) posiada jedno rozwiązanie w pewnej przestrzeni Banacha  $\mathcal{B}$ . Rozwiązanie to można znaleźć przez metodę kolejnych przybliżeń zbieżną w tej przestrzeni.

**Twierdzenie 2.** Niech  $\rho_k = \rho$ ,  $r_k = r$ . Rozwiązanie  $\psi_m(z)$  układu równań funkcyjnych (3.2) można przedstawić w postaci szeregu

$$\psi_m(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \psi_m^{(q)}(z) r^{2q}, \quad (5.2)$$

gdzie

$$\psi_m^{(0)}(z) = 1, \quad \psi_m^{(q+1)}(z) = \rho \sum_{k=1}^n \left( \overline{\psi_{0k}^{(q)}} E_{2^*}^*(z - a_k) + \overline{\psi_{1m}^{(q-1)}} E_{3^*}^*(z - a_k) + \dots + \overline{\psi_{q,k}^{(0)}} E_{q+2^*}^*(z - a_k) \right),$$

$$m = 1, 2, \dots, n; \quad q = 0, 1, \dots \quad (5.3)$$

Liczba  $\psi_{jk}^{(q)}$  jest  $j$ -ym współczynnikiem szeregu Taylora funkcji  $\psi_k^{(q)}(z)$ . Szereg (5.2) i przybliżenia (5.3) są zbieżne jednostajnie we wszystkich kołach  $|z - a_m| \leq r_m$ .

Uwaga:  $E_p^*(z - a_k) := E_p(z - a_k)$ , jeśli  $k \neq m$ ;  $E_p^*(z - a_k) := E_p(z - a_k) - \frac{1}{(z - a_k)^p}$ , jeśli  $k = m$ .

## 6. Tensor efektywnej przewodności $\Lambda_e = \begin{pmatrix} \lambda_e^x & \lambda_e^{xy} \\ \lambda_e^{xy} & \lambda_e^y \end{pmatrix}$

Definicja współrzędnych  $\lambda_e^x$  i  $\lambda_e^{xy}$  tensora  $\Lambda_e$ :

$$\lambda_e^x = \int_D \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{D_k} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \quad \lambda_e^{xy} = \int_D \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_{D_k} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy. \quad (6.1)$$

Wzór (6.1) w nomenklaturze potencjałów zespolonych:

$$\lambda_e^x - i\lambda_e^{xy} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \rho_k v_k \psi_k(a_k),$$

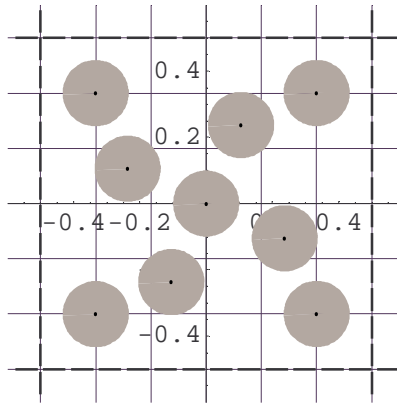
gdzie  $v_k = \pi r_k^2$  jest koncentracją wtrąceń o przewodności  $\lambda_k$ . Wprowadźmy wielkości

$$\mathcal{X}[p_1 \dots p_M] = \sum_{m, k_0, \dots, k_M}^n E_{p_1}(a_m - a_{k_1}) \overline{E_{p_2}(a_{k_1} - a_{k_2})} \dots \mathcal{C}^{M-1} E_{p_M}(a_{k_{M-1}} - a_{k_M}),$$

gdzie  $\mathcal{C}: a+ib \rightarrow a-ib$  jest operatorem sprzężenia.

Rozpatrzmy przypadek jednakowych wtrąceń ( $\rho_k = \rho$ ,  $r_k = r$ ) tworzących układ makroskopowo izotropowy ( $\lambda_e^x = \lambda_e^y = \lambda_e$ ,  $\lambda_e^{xy} = 0$ ). Wtedy

$$\lambda_e = 1 + 2 \rho v \sum_{p=1}^{\infty} A[[p]] v^{p-1}$$



$$A[[2]] = \frac{\rho}{\pi n^2} X[[2]]$$

$$1 \cdot \rho$$

$$A[[3]] = \frac{\rho^2}{\pi^2 n^3} X[[2, 2]]$$

$$2.31326 \rho^2$$

$$A[[4]] = \frac{1}{\pi^3 n^4} (-2 \rho^2 \mathbb{X}[3, 3] + \rho^3 \mathbb{X}[2, 2, 2])$$

$$1.02069 \rho^2 + 3.62652 \rho^3$$

$$A[[5]] = \frac{1}{\pi^4 n^5} (6 \rho^2 \mathbb{X}[4, 4] + 2 \rho^3 (\mathbb{X}[3, 3, 2] + \mathbb{X}[2, 3, 3]) + \rho^4 \mathbb{X}[2, 2, 2, 2])$$

$$4.21634 \rho^2 - 2.04138 \rho^3 + 8.24068 \rho^4$$

$$A[[6]] = \frac{1}{\pi^5 n^6} (-24 \rho^2 \mathbb{X}[5, 5] + 6 \rho^3 (\mathbb{X}[4, 4, 2] + \mathbb{X}[3, 4, 3] + \mathbb{X}[2, 4, 4]) - 2 \rho^4 (\mathbb{X}[3, 3, 2, 2] + \mathbb{X}[2, 3, 3, 2] + \mathbb{X}[2, 2, 3, 3]) + \rho^5 \mathbb{X}[2, 2, 2, 2, 2])$$

$$7.73167 \rho^2 + 8.43267 \rho^3 + 7.24832 \rho^4 + 14.5795 \rho^5$$

$$A[[7]] = \frac{1}{\pi^6 n^7} (120 \rho^2 \mathbb{X}[6, 6] - 24 \rho^3 (\mathbb{X}[2, 5, 5] + \mathbb{X}[3, 5, 4] + \mathbb{X}[4, 5, 3] + \mathbb{X}[5, 5, 2]) + 6 \rho^4 (\mathbb{X}[2, 2, 4, 4] + \mathbb{X}[2, 3, 4, 3] + \mathbb{X}[3, 3, 3, 3] + \mathbb{X}[2, 4, 4, 2] + \mathbb{X}[3, 4, 3, 2] + \mathbb{X}[4, 4, 2, 2]) - 24 \rho^5 (\mathbb{X}[2, 2, 2, 3, 3] + \mathbb{X}[2, 2, 3, 3, 2] + \mathbb{X}[2, 3, 3, 2, 2] + \mathbb{X}[3, 3, 2, 2, 2]) + \rho^6 \mathbb{X}[2, 2, 2, 2, 2])$$

$$7.15993 \rho^2 + 15.4633 \rho^3 + 33.1164 \rho^4 + 181.633 \rho^5 + 31.1353 \rho^6$$

$$\lambda_e = 1 + 2 \rho v \sum_{p=1}^7 A[[p+1]] v^{p-1}$$

$$\lambda_e = 1 + 2 v \rho + 2 v^2 \rho^2 + 4.62652 v^3 \rho^3 + v^4 (2.04138 \rho^3 + 7.25304 \rho^4) + v^5 (8.43267 \rho^3 - 4.08276 \rho^4 + 16.4814 \rho^5) + v^6 (15.4633 \rho^3 + 16.8653 \rho^4 + 14.4966 \rho^5 + 29.159 \rho^6) + v^7 (14.3199 \rho^3 + 30.9267 \rho^4 + 66.2327 \rho^5 + 363.267 \rho^6 + 62.2707 \rho^7)$$

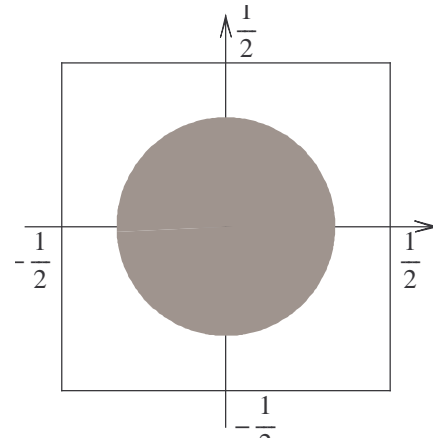
**Otwarty problem:** Czy istnieje prosta reguła obliczenia  $A[[k]]$ ?

Wskaźniki  $p_1 p_2 \dots p_M$  splotów  $X_{p_1 p_2 \dots p_M}$ :

2															
22															
33	222														
44	332	233			2222										
55	442	343	244		3322	2332	2233			22222					
66	255	354	453	552	2244	2343	3333	2442	3432	4422	22233	22332	23322	33222	222222

## Regularny układ:

Siatka kwadratowa z jednym wtrąceniem w komórce



$$\lambda_e = 1 + 2 \rho v \sum_{m=0}^{\infty} A_m(r^2) \rho^m r^{2m},$$

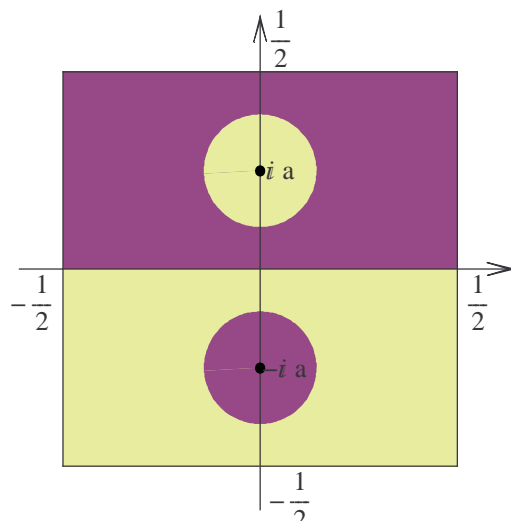
gdzie

$$A_1(x) = \alpha^{-1} 2 \zeta(\alpha/2), \quad A_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{2n}^{(2)} \mathcal{S}_{2(n+1)} x^{2n},$$

$$A_m(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_{m-1}=0}^{\infty} \sigma_{2n_1}^{(2n_2+2)} \sigma_{2n_2}^{(2n_3+2)} \cdots \sigma_{2n_{m-2}}^{(2n_{m-1}+2)} \sigma_{2n_{m-1}}^{(2)} \mathcal{S}_{2(n_1+1)} x^{2(n_1+n_2+\dots+n_{m-1})},$$

$$\sigma_{2l}^{(2n)} = C_{2l+2n-1}^{2l} \mathcal{S}_{2(n+l)}.$$

## Materiały kompozytowe laminarne - włókniste:



$$\lambda_e^x \approx \lambda_0^x \left( 1 - 4 \rho \pi r^2 - 4 \rho^3 (2 \rho + 1) \pi r^4 \operatorname{Re} \wp(2 i a) \right),$$

gdzie  $\lambda_0^x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ ,  $\wp(z)$  - funkcja Weierstrassa;

$$\lambda_e^y \approx \lambda_0^y \left( 1 + 4 \rho \pi r^2 + 4 \rho^3 (2 \rho + 1) \pi r^4 \operatorname{Re} \wp(2 i a) \right), \text{ gdzie } \lambda_0^y = \frac{2}{1/\lambda_1 + 1/\lambda_2}.$$

Wektorowe równanie funkcyjne:

$$\psi_m(z) = \sum_{k=1}^n \Omega_k \sum_{m_1, m_2} / \left( \frac{r_k}{z - a_k - m_1 - i m_2} \right)^2 \overline{\psi_k \left( \frac{r_k}{z - a_k - m_1 - i m_2} + a_k \right)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|z - a_m| \leq r_m, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

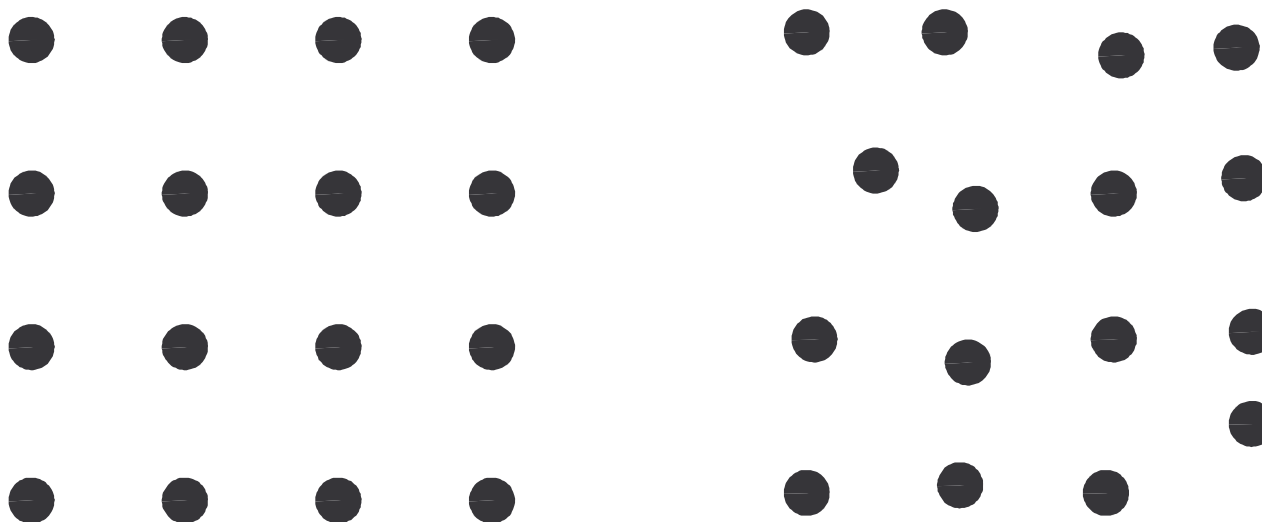
## Extremalna własność układu regularnego a losowy układ wtrąceń:

Ekstremalne własności układu heksagonalnego dla małych udziałów objętościowych ( $v \sim 0$ ) zbadane w artykule Kozlov S.M. (1989), Geometrical aspects of averaging. Russian Math. Surveys 44:2, 91-144.

**Otwarty problem:** Czy układ heksagonalny posiada ekstremalne własności dla dowolnych  $v$ ?

Rozpatrzmy środki wtrąceń  $a_k$  jako zmienne losowe podlegające pewnemu rozkładowi probabilistycznemu.

Model "shaking geometry" wprowadzony w artykule [Berlyand L., Mityushev V. Generalized Clausius-Mossotti formula for random composite with circular fibers, J Statist. Phys. v.102, N 1/2, 2001, 115-145] dotyczy jednostajnego rozkładu zmiennej losowej  $a_k$  w małym kwadracie. W tym modelu układ regularny posiada lokalne ekstremalne własności.



**Otwarty problem:** Zbadać losowe równanie funkcyjne. Oszacować  $\lambda_e$  dla "non-overlapping model".

## 7. Przenikalność cieczy lepkiej

Równanie:  $\Delta w = 1$  (równanie Poissona) (7.1)

$$w(x, y) \text{ periodyczna} \quad (7.2)$$

$$w(x, y) = 0 \text{ na } \partial D \quad (7.3)$$

Zagadnienie (6.1)-(6.3) można sprowadzić do zagadnienia względem harmonicznej funkcji  $u(z)$ :

$$\Delta u = 0 \quad (7.4)$$

$$u(x, y) \text{ periodyczna} \quad (7.5)$$

$$u(x, y) = -\frac{1}{4\pi} (S_2 x^2 - (2\pi - S_2) y^2) + \frac{1}{2\pi n} \ln |\sigma(z - a_k)| \text{ na } \partial D \quad (7.6)$$

Przenikalność wzdłuż włókien określona wzorem  $K = -\int_D w(x, y) d\sigma$

Konstruktywny wzór: 
$$K = -\left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{\ln r_k}\right)^{-1} \left(1 - \sum_{\mathbf{s}, j} c_{\mathbf{s}, j} \frac{r_1^{2s_1} r_2^{2s_2} \dots r_n^{2s_n}}{\ln^{t_1} r_1 \ln^{t_2} r_2 \dots \ln^{t_n} r_n}\right),$$

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n), \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n).$$

**Otwarty problem:** Zagadnienia typu

$$\mathbf{L}w = 0, \quad (7.1')$$

$$w(x, y) \text{ periodyczna}, \quad (7.2')$$

$$w(x, y) = f(x, y) \text{ dla } (x, y) \in \partial D, \quad (7.3')$$

gdzie  $\mathbf{L}$  - operator różniczkowy niekoniecznie liniowy.